Diffusion de charge électrique à une dimension

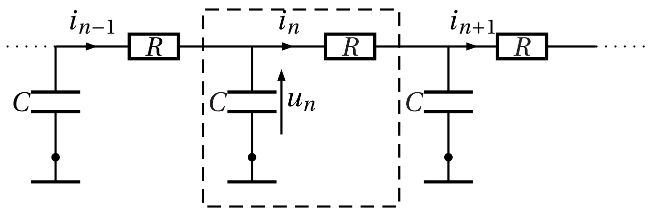
Lycée Descartes

Février 2015

L'objectif de ce TP est l'étude de la réponse d'une ligne $R-C$ composée d'une vingtaine de cellules, à différentes excitations. Ces manipulations sont analogues aux expériences de diffusion thermique que l'on peut faire avec une barre conductrice de la chaleur isolée latéralement. On fera autant que possible des rapprochements avec ce phénomène.

1 Montage expérimental

Le montage est constitué de vingt cellules $R-C$ régulièrement espacées avec $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 100\,\mathrm{nF}$, dont les entrées sont numérotées de $n = 0$ à $n = 19$. On notera $\tau = R\cdot C$. Il est possible de faire des mesures de tension aux bornes de chaque capacité.



2 Equation de diffusion

- En appliquant une loi des nœuds et une loi des mailles, donner une relation entre u_n, u_{n+1} et u_{n-1}.
- En faisant l'approximation des milieux continus, en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension $u(x,t)$ telle que $u(x=n,t) = u_n$.
- Exprimer le « coefficient de diffusion ».
- À quelle condition l'approximation des milieux continus est-elle valable ?

3 Régime sinusoïdal forcé

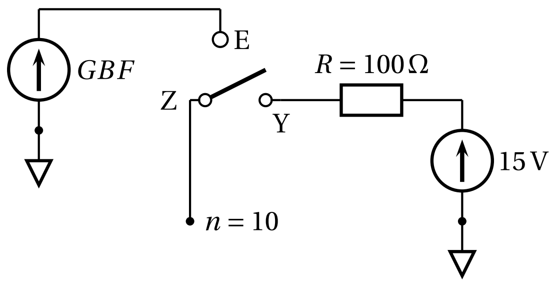
Appliquer une tension $u_0(t)$ sinusoïdale d'amplitude $U_0 = 10\,\mathrm{V}$ et de fréquence $f = 100\,\mathrm{Hz}$, l'extrémité $n = 20$ étant en circuit ouvert.

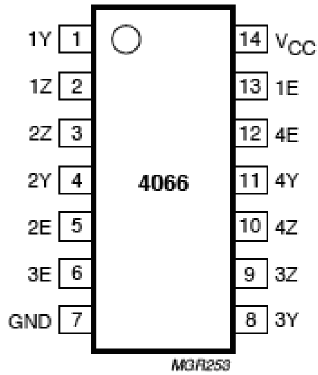
- Quelle est la situation analogue en diffusion thermique ?
- En déduire que la solution est de la forme :

  $$u_n(t) = U_0 \exp\left(-\frac{n}{\nu}\right)\cos\left(\omega t - \frac{n}{\nu}\right) \text{ avec } \nu = \sqrt{\frac{2}{\omega\tau}}$$
- Exprimer la vitesse de phase de l'onde diffusive. Donner une condition pour que l'approximation des milieux continus soit valable et vérifier si c'est bien le cas à la fréquence choisie.
- Mesurer l'amplitude et la phase de $u_n(t)$ pour $n < 10$. Pourquoi fait-on cette limitation aux « faibles » valeurs de n ?
- Déterminer le nombre caractéristique ν à partir des mesures d'amplitude.
- Déterminer le nombre caractéristique ν à partir des mesures de phase.
- Comparer à la valeur attendue.

4 Réponse impulsionnelle

Réaliser le montage suivant, à l'aide d'un interrupteur commandé 4066, afin de générer une impulsion de tension suivie d'une déconnexion du générateur :



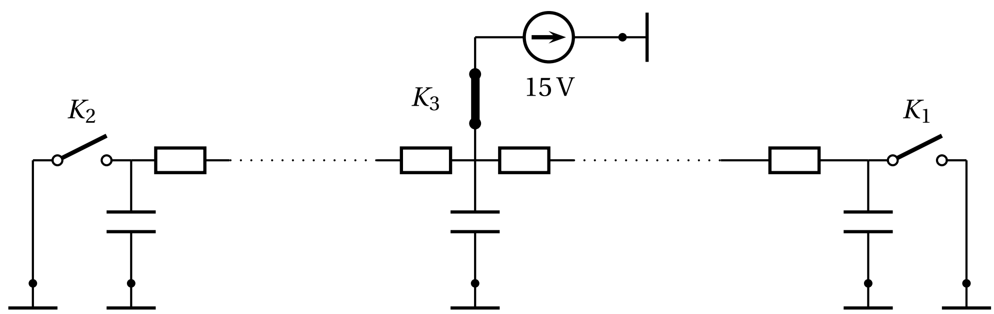


V_{CC} =supply voltage ; GND=ground. On utilisera le +15 V pour V_{CC}.

On applique cette impulsion, de manière périodique ($f = 100\,\text{Hz}$), de longueur (Width) 10 µs, de valeur (HiLevel) 10 V, avec un niveau bas (LoLevel) de 0 V au niveau de la cellule $n = 10$, au milieu de la plaquette. Les deux extrémités en $n = 0$ et $n = 20$ sont court-circuitées. On se limite à l'étude d'une seule moitié en notant la symétrie du problème. On rappelle la formule qui donne la répartition de tension le long de la ligne de diffusion : $u(n,t) \propto \dfrac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\dfrac{n^2\tau}{4t}\right)$

- Enregistrer les tensions $u_n(t)$ pour $n > 10$ dans un seul fichier (une courbe par page dans laquelle on renseignera le paramètre n). On prendra soin d'avoir une origine ($t = 0$) au démarrage de la diffusion en se synchronisant sur le front montant du signal $u_0(t)$.
- Tracer les courbes $u_n = f(n)$ à quatre instants différents compris entre 0,15 ms et 1,5 ms. La fonction à utiliser s'écrit, si la tension est notée V, pos(V,t=0.00015). Sachant qu'il s'agit de déterminer la largeur à mi-hauteur $\Delta n_{1/2}$ à un instant t, on choisira judicieusement ces instants. Vérifier la dépendance en $\sqrt{t}$ de $\Delta n_{1/2}$.
- En déduire une estimation de τ. Comparer avec les données.
- Pourquoi ne pas appliquer directement l'impulsion de sortie du GBF ?
- Donner une expérience équivalente en diffusion de particules.

5 Trempe

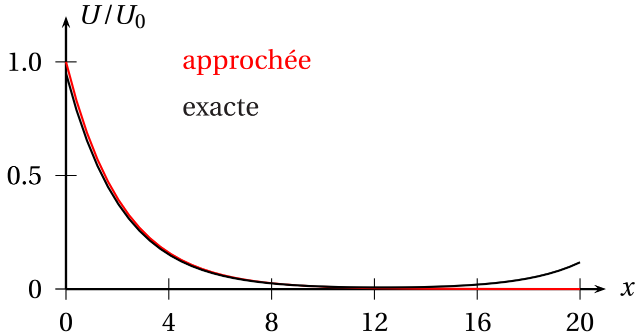


État initial ($t < 0$) : K_3 fermé et K_2, K_1 ouverts.
À $t = 0$, on bascule simultanément K_3 ouvert et K_2, K_1 fermés.

6

Loi des noeuds $i_n = i_{n-1} + C\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}$
Loi des mailles $u_{n+1} = u_n + Ri_n$
Soit $\tau\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} = u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n$
En posant $u_n(t) = u(n,t)$, on reconnait $\dfrac{\partial^2 u(n,t)}{\partial n^2} \approx (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)/1^2$
On a donc $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial^2 u}{\partial n^2}$, avec un « coefficient de diffusion » de dimension $1^2 T^{-1}$

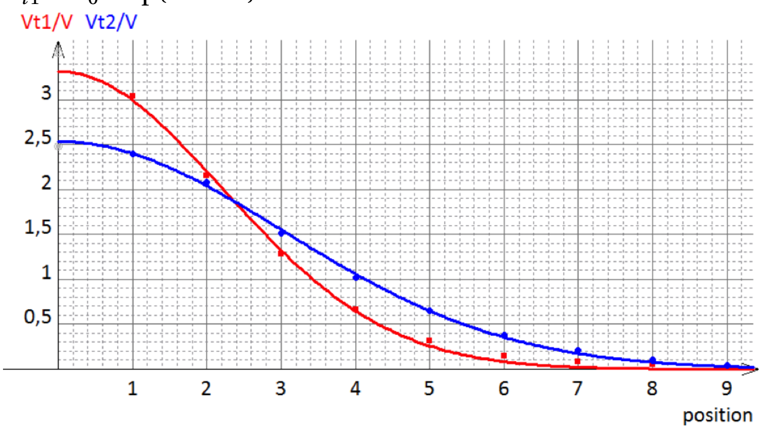
On réécrit l'équation en complexe $\mathrm{j}\omega\underline{U} = \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{U}}{\mathrm{d}n^2}$ d'équation caractéristique $\mathrm{j}\omega = \dfrac{1}{\tau}k^2$ et donc $k = \pm\dfrac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\tau}$. La solution est de type $u_n(t) = U_0 \exp\left(-\dfrac{n}{\nu}\right)\cos\left(\omega t - \dfrac{n}{\nu}\right)$, la vitesse de phase est donc $\sqrt{\dfrac{2\omega}{\tau}}$. Il faut que $\lambda \gg a$, soit ici $2\pi\nu \gg 1$, soit numériquement $\nu = 5{,}64$ et donc $\lambda = 35 \gg 1$. En $n = 20$, on obtient $U_{20} = U_0 \cdot 0{,}03$ non compatible avec un court-circuit, le courant qui circulerait si le système était infini serait de $I_{20} = C\omega U_{20}$ non nul, non compatible avec l'extrémité en circuit ouvert. Il y aura donc réflexion de cette onde et les mesures pour n « grand » seront erronées.



La déconnexion est nécessaire, sinon lorsque l'impulsion est à zéro, on aurait en parallèle sur le premier condensateur une résistance de 50 Ω, la résistance interne du GBF.

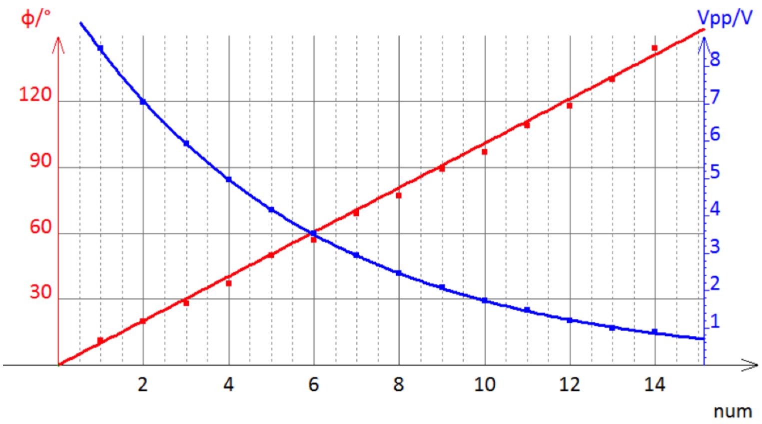
7 Impulsion au centre

$V_{t1} = V_0 \cdot \exp(-k \cdot n^2)$



1 au bout de 200 µs ; 2 au bout de 400 µs
$V_{01} = (3{,}32 \pm 0{,}07)\,\mathrm{V}$; $V_{02} = (2{,}54 \pm 0{,}04)\,\mathrm{V}$
$k_1 = (102 \pm 4) \times 10^{-3}$; $k_2 = (55 \pm 2) \times 10^{-3}$
On a bien $\dfrac{k_1}{k_2} = 1{,}85 = 2!$ et $\dfrac{V_{01}}{V_{02}} = 1{,}30 = 1{,}414!$

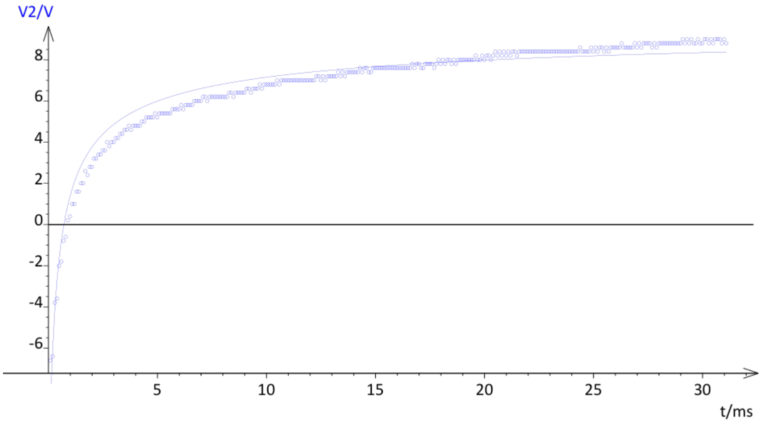
8 Attaque sinusoïdale



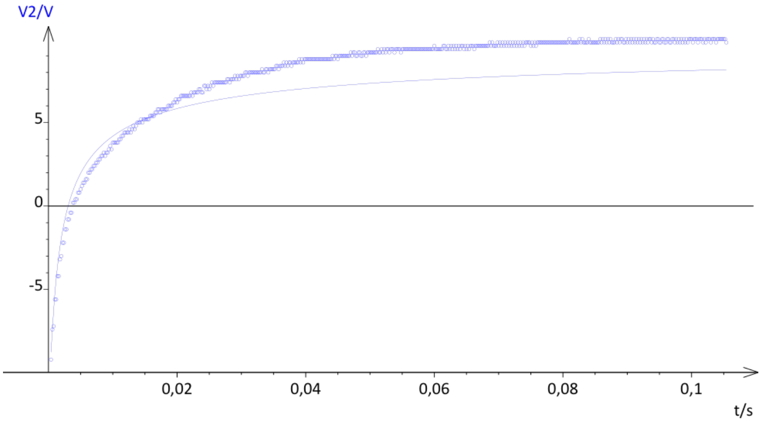
$\phi = k \cdot n \dfrac{180}{\pi}$; $V_{pp} = V_0 * \exp(-k \cdot n)$; $k = 0{,}176 \pm 0{,}001$; théorie 0,177

9 Réponse à un échelon

Modélisation par erf



Point n°3, ça marche moyennement



Point n°6, là il est clair que 20 n'est pas vraiment l'infini par rapport à 6