# Dérivation numérique

Un petit texte sur la « définition » de la vitesse dans les programmes actuels. Il y a un dialogue de sourd entre les intervenants, venant du fait que les concepteurs du programme confondent deux choses, la définition de la vitesse et le calcul numérique de celle-ci à partir de données discrètes, sur lesquelles, par principe même, on en peut faire de passage à la limite. Imaginerait-on un programme qui *définirait* sin(40) comme étant la moyenne de sin(45) et sin(35) ?

## 1 Introduction

Soit une fonction f, trois fois dérivable, développé par Taylor à l'ordre 3 :

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2}f''(t) + \frac{h^3}{6}f'''(t) + O(h^4)$$

On suppose qu'il n'y a pas d'incertitudes sur $t$ (typiquement le temps dans une étude cinématique) et une incertitude constante $\delta$ sur la détermination de la valeur de $f$.

Remarque : si on a une fonction linéaire, n'importe quel type de dérivation numérique convient : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$, quel que soient les points pris pour le calcul de l'écart. Cela s'applique au calcul de la vitesse pour un mouvement uniforme, et au calcul de l'accélération pour un mouvement uniformément accéléré.

## 2 Dérivée à droite

### 2.1 Composante de la vitesse

On note $v$ la vitesse et $\hat{v}$ son évaluation.

$$\hat{v}(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{hf'(t) + h^2/2f''(t) + h^3f'''(t) + O(h^4)}{h} = f'(t) + \frac{h}{2}f''(t) + \frac{h^2}{6}f'''(t) + O(h^3)$$

Donc une erreur de méthode de l'ordre de $\frac{h}{2}f''(t)$ à laquelle il faut ajouter l'incertitude $\dfrac{\sqrt{2}\delta}{h}$. En se limitant à l'ordre 1 pour l'erreur de méthode, et se plaçant dans le pire des cas pur la combinaison des deux erreurs, l'erreur est : $\dfrac{\sqrt{2}\delta}{h} + \frac{h}{2}\left|f''(t)\right|$. Si on dérive, on trouve que l'optimum est pour $h = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}\delta}{\left|f''(t)\right|}}$, on ne peut faire tendre $h$ vers 0 !

**Cas d'une chute libre** $\hat{v}_z(t) = v_z(t) + \frac{h}{2}g$.

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme** en temps réduit, $\hat{v}_x(t) = v_x(t) - \frac{h}{2}a\cdot\cos(t) + O(h^2)$ pour $x = a\cdot\cos(t)$, l'erreur maximale relative à la vitesse maximale est $\dfrac{h}{2}$ (en temps réduit donc en temps réel $h \to h\omega = \alpha$ = angle entre deux points successifs.).

## 2.2 Norme de la vitesse

$\hat{v}^2 \approx v^2 + h\vec{v}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}(ha)^2 + \frac{h^2}{3}\vec{v}\cdot\vec{j}$.

**Cas d'une chute libre** $\hat{v}^2 \approx v^2 + v_z \cdot h \cdot g$.

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme** $\hat{v} \approx v\left(1 + \frac{h^2}{6}\right)$.

Remarque : pour la norme, le calcul géométrique, $\frac{2a\sin(h/2)}{h}$ est plus rapide.

Pour un angle $\alpha = 15^\circ \approx 0{,}26\,\text{rad}$, soit 25 points pour un tour, l'erreur relative est de 1%.

## 2.3 Direction de la vitesse

L'écart angulaire est de $\frac{h}{2}\frac{\vec{v}}{v} \wedge \frac{\vec{a}}{v}$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, l'écart est de $\frac{h}{2} = \frac{\alpha}{2}$ (évident géométriquement).

## 2.4 Accélération

On note $a$ l'accélération et $\hat{a}$ son évaluation.
Calcul de l'accélération par dérivée de la vitesse évaluée.
On développe $\hat{v}(t+h)$ en fonction de $v(t)$ :

$$\hat{v}(t+h) = \frac{f(t+2\cdot h) - f(t+h)}{h} = f'(t) + 3\tfrac{h}{2}f''(t) + 7\tfrac{h^2}{6}f'''(t) + O(h^3)$$

$$\hat{a}(t) = \frac{\hat{v}(t+h) - \hat{v}(t)}{h} = \frac{hf''(t) + h^2 f'''(t) + O(h^3)}{h} = f''(t) + hf'''(t) + O(h^2)$$

Donc une erreur de méthode de l'ordre de $hf'''(t)$ à laquelle il faut ajouter l'incertitude $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\delta/h\right)}{h} = \frac{2\delta}{h^2}$.

**Cas d'une chute libre** le terme en $f'''$ est nul ! Donc pas d'erreur de méthode, il reste l'incertitude des mesures : pour une chute filmée à 25 images par seconde, une précision de 10% sur $g$ requiert des mesures de distances au mm près. On voit que 25 images par seconde est déjà trop rapide :

il *ne faut pas* faire tendre $\Delta t$ vers zéro !

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme** $\hat{a}_x(t) = a_x(t) + ha\sin(t) + O(h^2)$.

## 2.5 Direction de l'accélération

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{\hat{a}}$ vaut $h = \alpha$.

### 2.6 Accélération astucieuse

Calcul de l'accélération par dérivée *à gauche* de la vitesse évaluée *à droite*. C'est en quelque sorte l'intégration de Verlet à l'envers. Cela revient à calculer $a(t) = \dfrac{f(t+h)+f(t-h)-2\cdot f(t)}{h^2}$, méthode « normale » de calcul d'une dérivée seconde, on remarque que une fois à gauche, une fois à droite est équivalent à centré.

On développe $\hat{v}(t-h)$ en fonction de $v(t)$ :

$$\hat{v}(t-h) = \frac{f(t)-f(t-h)}{h} = f'(t) - \tfrac{h}{2}f''(t) + \tfrac{h^2}{6}f'''(t) - \tfrac{h^3}{24}f^{iv}(t) + O(h^4)$$

$$\hat{a}(t) = \frac{\hat{v}(t)-\hat{v}(t-h)}{h} = \frac{hf''(t)+h^3/12f^{iv}(t)+O(h^4)}{h} = f''(t) + \tfrac{h^3}{12}f^{iv}(t) + O(h^4)$$

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme** $\hat{a}_x(t) = a_x(t) + \frac{1}{12}h^2\cdot a\cos(t) + O(h^3)$, l'erreur maximale relative à l'accélération maximale est $\dfrac{h^2}{12} = \dfrac{\alpha^2}{12}$. L'erreur de méthode est du même ordre que celle de la dérivée centrée.

# 3 Dérivée centrée

### 3.1 Composante de la vitesse

$$\hat{v}(t) = \frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h} = \frac{2hf'(t)+h^3/3f'''(t)+O(h^4)}{2h} = f'(t) + \tfrac{h^2}{6}f'''(t) + O(h^3)$$

Donc une erreur de méthode de l'ordre de $\frac{h^2}{6}f'''(t)$ à laquelle il faut ajouter l'incertitude $\dfrac{\sqrt{2}\delta}{2h} = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}h}$. On gagne un facteur 2 sur l'incertitude par rapport à la dérivée à droite. En se plaçant dans le pire des cas l'erreur est : $\dfrac{\delta}{\sqrt{2}h} + \frac{h^2}{6}\left|f'''(t)\right|$. Si on dérive, on trouve que l'optimum est pour $h = \sqrt[3]{\dfrac{3\delta}{\sqrt{2}\left|f'''(t)\right|}}$.

**Cas d'une chute libre** $\hat{v}(t) = v(t)$. Pas d'erreur de méthode.

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme** $x = a\cdot\cos(t)$ : $\hat{v}_x(t) = v_x(t) + \frac{h^2}{6}a\sin(t) + O(h^3)$, l'erreur relative est $\dfrac{h^2}{6}$, d'ordre 2 à comparer à l'ordre 1 pour la dérivée à droite.

### 3.2 Norme de la vitesse

On note $\vec{j} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$ le jerk ou jolt. $\hat{v}^2 \approx v^2 + \dfrac{h^2}{3}\left(\vec{j}\cdot\vec{v}\right)$, soit $\hat{v} \approx v + \dfrac{h^2}{6}\vec{j}\cdot\dfrac{\vec{v}}{v}$

**Cas d'une chute libre** Pas d'erreur de méthode.

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme** En norme $\hat{v} \approx v\left(1 + \dfrac{h^2}{12}\right)$.

Pour un angle $\alpha = 17° \approx 0{,}3\,\mathrm{rad}$, l'erreur relative est de 1,5%.

### 3.3 Méthode alternative

Détermination de la vitesse par (somme des distances $M_{i-1}M_i \quad M_iM_{i+1}$) divisée par l'écart temporel.

$$\hat{v} = v + \frac{h^2}{24v^3}(3(a_x^2 v_y^2 + a_y^2 v_x^2 - 2a_x a_y v_x v_y) + 4\vec{j}\cdot\vec{v}v^2)$$
$$\hat{v} = v + \frac{h^2}{24v^3}(3(a_x v_y - a_y v_x)^2 + 4\vec{j}\cdot\vec{v}v^2)$$
$$\hat{v} = v + h^2\left(\frac{1}{8v^3}\left(\vec{a}\wedge\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{6v}\vec{j}\cdot\vec{v}\right)$$

**Cas d'une chute libre** erreur due à $\vec{a}\wedge\vec{v}$

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme** $\frac{1}{v^3}\left(\vec{a}\wedge\vec{v}\right)^2 = 1$ ; $\frac{1}{v}\vec{j}\cdot\vec{v} = -1$. Les deux erreurs sont de signes opposés et $\hat{v} = v + h^2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right) = v - \frac{h^2}{24}$.

### 3.4 Direction de la vitesse

L'écart angulaire est de $\frac{h^2}{6}\frac{\vec{v}}{v}\wedge\frac{\vec{j}}{v}$

**Cas d'une chute libre** Écart nul : jerk nul.

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme** Écart nul : jerk parallèle à la vitesse.

### 3.5 Composante de l'accélération

$$\hat{a}(t) = \frac{\hat{v}(t+h) - \hat{v}(t-h)}{2h} = \frac{2hf''(t) + h^3/3f^{iv}(t) + O(h^4)}{2h} = f''(t) + \tfrac{h^2}{6}f^{iv}(t) + O(h^3)$$

Donc une erreur de méthode de l'ordre de $\frac{h^3}{3}f^{iv}(t)$ à laquelle il faut ajouter l'incertitude $\frac{\sqrt{2}\cdot\delta/\left(\sqrt{2}h\right)}{2h} = \frac{\delta}{2h^2}$. On gagne un facteur 4 sur l'incertitude.

**Cas d'une chute libre** $\hat{a}_z(t) = a_z(t)$. Pas d'erreur de méthode.

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme** $\hat{a}_x(t) = a_x(t) + \frac{h^2 a}{6}\cos(t) + O(h^3)$. On gagne un facteur, par rapport à la dérivée à droite, $\frac{h}{6} = \frac{\alpha}{6}$ toujours plus petit que 1 dans les cas réalistes.

### 3.6 Direction de l'accélération

**Cas d'une chute libre :** pas d'erreur de méthode.

**Cas d'un mouvement circulaire uniforme :** pas d'erreur de méthode.

# 4 Texte de Philippe Ménétrier (École Alsacienne)

## 4.1 Calcul de la vitesse

Un petit rappel de math : la définition de la vitesse en un point M($t$) est donnée mathématiquement par la formule : $\vec{V}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overrightarrow{OM}(t+h) - \overrightarrow{OM}(t)}{h}$ que $h$ soit positif ou négatif. Pour une fonction dérivable en $t$, la limite à droite est égale à la limite à gauche !

En physique, on échantillonne les positions, on ne peut faire tendre $h$ vers 0, on fait avec ce que l'on a, on approxime. On a des vitesses moyennes, jamais les instantanées. On dispose des points M(i) (en fait $\overrightarrow{OM}(i)$, de $T$ la période d'échantillonnage et de :

— la vitesse moyenne à droite, égale à $V_d(i) = \dfrac{M(i+1) - M(i)}{T}$

— la vitesse moyenne à gauche, égale à $V_g(i) = \dfrac{M(i) - M(i-1)}{T}$

Le débat c'est quelle vitesse choisir comme vitesse instantanée en $i$ ?

Le programme a choisi la vitesse à droite comme meilleure vitesse (comme si $h$ était positif). Trop simple ? Simpliste ? Absurde ? Pas optimal en tout cas. Je suis persuadé que la question a fait débat.

Mais pour les élèves, on peut leur demander ce qu'ils proposeraient de choisir, la droite, la gauche, pourquoi l'un plutôt que l'autre ? Et là j'en suis sûr, mais je n'ai pas encore fait l'activité : « On fait la moyenne monsieur ! » et après calcul et simplification on arrive à la formule :

$$V(i) = \frac{M(i+1) - M(i-1)}{2T}$$

C'est en fait la formule classique, la meilleure approximation. Je laisse donc les élèves proposer et ils auront compris (un grand nombre je l'espère).

## 4.2 Calcul de l'accélération

En math, c'est la dérivée seconde ou la dérivée de la dérivée, qui droite ou gauche sont encore égales. En physique, on dispose des points M($i$), des vitesses $V_d(i)$ et $V_g(i)$.

— si on applique l'esprit du programme, on calcule la variation à droite de la vitesse à droite et on obtient

$$A(i) = \frac{V_d(i+1) - V_d(i)}{T} = \frac{M(i+2) + M(i) - 2M(i+1)}{T^2}$$

C'est en fait la meilleure approximation mais au point en $i+1$ ! Dans le cas de la chute libre, pas de problème car $A$ est constante, mais dans le cas d'un mouvement à force centrale, c'est faux ...

— si on applique l'esprit de la moyenne des expressions, on calcule :

— l'accélération moyenne à droite

$$A_d(i) = \frac{V(i+1) - V(i)}{T} = \frac{M(i+2) + M(i-1) - M(i) - M(i+1)}{2T^2}$$

— l'accélération moyenne à gauche

$A_g(i) = \dfrac{V(i) - V(i-1)}{T} = \dfrac{M(i+1) + M(i-2) - M(i-1) - M(i)}{2T^2}$

— on calcule la moyenne des deux accélérations

$A(i) = \dfrac{[M(i-2) + M(i+2) - 2M(i)]}{4T^2}$

— on peut remarquer qu'on calcule avec les points $i-2$ et $i+2$ séparés du point $i$ d'un temps $2T$,

— en appliquant la même formule sur les points $i-1$ et $i+1$ disponibles et séparés du temps $T$ on obtient
$A(i) = \frac{M(i-1)+M(i+1)-2M(i)]}{T^2}$

— c'est la formule classique.

Si j'avais des premières, j'irais directement au résultat final en affirmant qu'en appliquant la méthode et en simplifiant on obtient le dit résultat.

On peut aussi faire remarquer aux élèves, qu'autour du point $i$, la vitesse varie en fait de $V_g$ en moyenne à $V_d$ en moyenne en un temps $T$ et donc que

$$A(i) = \frac{V_d(i) - V_g(i)}{T} = \frac{M(i-1)+M(i+1)-2M(i)}{T^2}$$

On retrouve la formule classique.

# 5 Comparaison

La dérivée à droite sera « meilleure » que la dérivée centrée si $\frac{h}{2}\left|f''(t)\right| < \frac{h^3}{3}\left|f'''(t)\right|$, soit :

— $\left|f'''(t)\right| > \frac{3}{2}\frac{\left|f''(t)\right|}{h}$, grande dérivée d'ordre 3, donc ?

— $h > \frac{2}{3}\left|\frac{f''(t)}{f'''(t)}\right|$, pas de calcul important, mais l'erreur sur la dérivée, $\propto h$, risque d'être importante. On suppose que $f'''(t) \neq 0$ sinon le problème est réglé ...

— $\left|f''(t)\right| < \frac{2}{3}\left|f'''(t)\right|$, faible dérivée d'ordre 2, donc voisinage d'un point d'inflexion

Pratiquement, le seul cas à retenir est qu'au voisinage d'un point d'inflexion, la dérivée à droite sera préférable.

# 6 Commentaires sur un article de Jean-Luc Gasser

BUP N°807 octobre 1998 p. 1435 sqq (et Repères IREM n°34 janvier 1999)

## 6.1 paragraphe 2 p. 1439

« on définit, en 1ère S, la vitesse instantanée au point Mi comme la vitesse moyenne sur un petit intervalle autour du point Mi $v_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t}$ ... »

Commentaires :

Ce n'est pas une définition, mais une technique pour (tenter) d'évaluer une dérivée. D'autre part, soit elle est instantanée, soit elle est moyenne ...

## 6.2 paragraphe 2 p. 1440

$\vec{v}_{M_4} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_5} - \overrightarrow{OM_3}}{t_5 - t_3}$

Commentaire : ce ne peut être une limite puisque $t_5$ et $t_3$ sont fixés.

## 6.3 paragraphe 3 p. 1448

« On obtient donc une bonne approximation de la dérivée grâce à l'approximation suggérée par les Physiciens ...lorsque le nombre $h$ est petit. »

« Le cours de physique indique bien que la longueur de l'intervalle doit tendre vers 0. »

Commentaires :

L'intervalle ne peut tendre vers zéro pour des raisons d'incertitudes : disons que l'on mesure en pixel un déplacement de 2, quelle est la précision de la vitesse obtenue ?

En physique petit signifie petit par rapport à quelque chose. À quoi comparer l'intervalle de temps pour dire qu'il n'est pas petit ?

## 6.4 paragraphe 3 p. 1450

« Méthode des différences finies, si la différences de deux valeurs successives est nulle à l'ordre $n+1$, alors le polynôme est d'ordre $n$. »

Commentaire : le problème est que lorsque l'on mesure, il y a des incertitudes, et donc on ne trouvera pas zéro comme différence troisième.

## 6.5 paragraphe 3 p. 1450

« Si l'on étudiait un mouvement circulaire, les résultats donnés par la formule (1) (dérivée centrée) seraient moins bons, sauf dans le cas du mouvement circulaire uniforme, pour lequel la valeur numérique sera inexacte (la corde est plus courte que l'arc) mais le support vectoriel correct (la médiatrice de la corde est aussi un rayon du cercle, et est donc perpendiculaire à la tangente au cercle). »

Commentaire : pour la parabole, la valeur est exacte et la corde est aussi plus courte.