Les manies du prof. de physique de PSI*

I Les infiniment petits

I.1 Introduction

L'introduction de $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ est due à Leibniz (1684) pour lequel cela signifiait

$$\frac{\text{variation infiniment petite de f}}{\text{variation infiniment petite de } x}$$

$\mathrm{d}f$ est une « quantité évanouissante ». Euler faisait usage de l'infiniment petit ε (1748). La notion de dérivée en tant que limite est apparue au XIX^e siècle. Remarque : $\dot{y}$ a été introduit par Newton (1671) et y' par Lagrange (1797). Cette notion est revenue avec l'analyse non standard (1966) qui définit un infinitésimal comme un nombre réel x tel que $|x| \leqslant y$ pour tout nombre réel y standard strictement positif. Il y a une définition mathématique de standard, disons que c'est tout nombre que l'on peut raisonnablement écrire. Lorsqu'un physicien raisonne avec les infinitésimaux, on peut dire soit qu'il raisonne comme à l'époque de Leibniz soit qu'il fait de l'analyse non standard. Il est probable qu'il faille plutôt envisager le premier cas.

I.2 Signification de $\mathrm{d}x$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}$$

la notation infinitésimale condense ceci en sous-entendant la limite soit

$$f'(x) = \frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{(x+\mathrm{d}x) - x}$$

Cf. la différentielle $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$, fonction linéaire tangente à $f(x)$.

I.3 Calcul avec une variable

On prend l'exemple de la fusée libre de masse M, de vitesse v (par rapport à un référentiel $\mathscr{R}_0$ galiléen) éjectant un gaz à la vitesse V (par rapport à la fusée) soit $v+V$ (par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0$) et avec un débit $D_m = -\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} > 0$. On note $\langle x\rangle_a^b = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b x\cdot\mathrm{d}t$ la valeur moyenne de x entre a et b. La conservation de la quantité de mouvement entre t et $t+\Delta t$ s'écrit, le gaz étant éjecté à une vitesse évoluant entre $v(t)+V$ et $v(t+\Delta t)+V$:

$$\begin{aligned}
M(t)\cdot v(t) &= M(t+\Delta t)\cdot v(t+\Delta t) - \Delta M(\langle v\rangle_t^{t+\Delta t}+V)\\
&= \left\{M(t)+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\Delta t\right\}\left\{v(t)+\langle a\rangle_t^{t+\Delta t}\Delta t\right\} - \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\Delta t(\langle v\rangle_t^{t+\Delta t}+V)\\
&= M(t)\cdot v(t) + M(t)\cdot\langle a(t)\rangle_t^{t+\Delta t}\Delta t - D_m\cdot v(t)\Delta t - D_m\Delta t\Delta t\,\langle a(t)\rangle_t^{t+\Delta t}\\
&\qquad + D_m\,\langle v\rangle_t^{t+\Delta t}\Delta t + D_m\cdot V\Delta t
\end{aligned}$$

soit après simplification par $M(t)\cdot v(t)$:

$$M(t)\,\langle a\rangle_t^{t+\Delta t}\Delta t = +D_m\,\langle a(t)\rangle\,\Delta t^2 - D_m\cdot V\Delta t + D_m\cdot v(t)\Delta t - D_m\,\langle v\rangle_t^{t+\Delta t}\Delta t$$

En divisant par Δt et en effectuant le passage à la limite $\Delta t\to 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M(t)\,\langle a\rangle_t^{t+\Delta t}\Delta t}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{+D_m\,\langle a(t)\rangle\,\Delta t^2 - D_m\cdot V\Delta t + D_m\cdot v(t)\Delta t - D_m\,\langle v\rangle_t^{t+\Delta t}\Delta t}{\Delta t}\\
M(t)a(t) &= \lim_{\Delta t\to 0} +D_m\,\langle a(t)\rangle\,\Delta t - D_m\cdot V + D_m\cdot v(t) - D_m\,\langle v\rangle_t^{t+\Delta t}\\
M(t)a(t) &= -D_m V
\end{aligned}$$

On peut condenser ce calcul en considérant que la définition de l'infiniment petit contient la notion de limite et donc

- lorsqu'il y a une différence il faut faire la distinction $f(t)$ et $f(t+\mathrm{d}t)$,
- lorsqu'il y a une somme [1], on peut confondre $\langle f\rangle_t^{t+\Delta t}$ et $f(t)$:

$$\begin{aligned}
M(t)v(t) &= M(t+\mathrm{d}t)\cdot v(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}M\cdot(v(t)+V)\\
&= \left\{M(t)+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right\}\left\{v(t)+a(t)\cdot\mathrm{d}t\right\} - \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\cdot(v(t)+V)\\
&= M(t)\cdot v(t) + M(t)\cdot a(t)\cdot\mathrm{d}t\\
&+ D_m\cdot v(t)\cdot\mathrm{d}t + D_m\cdot a(t)\cdot\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}t\\
&- D_m\cdot v(t)\cdot\mathrm{d}t - D_m V\cdot\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En suivant cette méthode le terme $D_m\cdot a(t)\cdot\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}t)$ s'annule bien, on ne le néglige pas et les deux termes $D_m\cdot v(t)\cdot\mathrm{d}t$ se compensent bien, il n'y a pas d'approximation.

I.4 Calcul avec deux variables

On prend comme exemple l'établissement de l'équation de diffusion thermique à une dimension : on a donc $T=T(x,t)$. On prend une tranche cylindrique de section droite S placée entre x et $x+\Delta x$ que l'on observe entre t et $t+\Delta t$, on suppose qu'il n'y a pas de dilatation i.e. volume invariable donc pas de travail ($\delta W=0$) et ϱ, masse volumique, constante; on suppose de même que c, la capacité thermique massique, est constante. Entre t et $t+\Delta t$, la température passe de $T(x,t)$ à $T(x,t+\Delta t)$ et donc, la capacité thermique étant $\mathrm{d}C=c\varrho S\,\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}
U(t+\Delta t)-U(t) &= \int_x^{x+\Delta x} c\varrho S(T(x',t+\Delta t)-T(x',t))\,\mathrm{d}x'\\
&= c\varrho S\Delta x\,\langle T(x,t+\Delta t)-T(x,t)\rangle_x
\end{aligned}$$

On écrit le premier principe $\mathrm{d}U=\delta Q+\delta W=\delta Q$. Par définition de la densité de flux thermique, $\delta Q = \oint \Delta t\,\vec{j}_Q\,\mathrm{d}\vec{S} = \Delta t(j_Q S(x) - j_Q S(x+\Delta x))$, le signe moins venant de la définition du vecteur surface comme vecteur entrant. Plus précisément, le flux a lieu entre t et $t+\Delta t$, soit pour le côté x :

$$\Delta Q(x) = \int_t^{t+\Delta t} j(x,t')S\,\mathrm{d}t' = \Delta t\left\langle j_Q(x,t')\right\rangle$$

1. une valeur moyenne entre deux instants est une somme

On égale les deux expressions, on divise par Δt et Δx, on simplifie par S et on utilise les propriétés des valeurs moyennes $\langle a+b\rangle = \langle a\rangle + \langle b\rangle$ et $\langle ka\rangle = k\langle a\rangle$:

$$c\varrho\left\langle \frac{T(x',t+\Delta t)-T(x',t)}{\Delta t}\right\rangle_x^{x+\Delta x} = \left\langle \frac{j_Q(x,t')-j_Q(x,t')}{\Delta x}\right\rangle_t^{t+\Delta t}$$

On effectue enfin le passage $\Delta t \to 0$ puis $\Delta x \to 0$. La première valeur moyenne tend bien vers la valeur en x de la dérivée partielle de T par rapport à t. On ferait de même avec le côté droit. On obtient $c\varrho\dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}$.

Conclusion 1 si T désigne la température, à l'instant t, d'une tranche entre x et $x+\mathrm{d}x$, par définition de $\mathrm{d}x$ qui condense le calcul ci-dessus (passage à la limite sous entendu), ce T est bien $T(x,t)$. De même si j_Q désigne la densité de flux entrant, en x, entre t et $t+\mathrm{d}t$, ce j_Q est bien $j_Q(x,t)$.

Conclusion 2 si T désigne la température de la face en x et T' la température de la face en $x+\mathrm{d}x$, $T'-T = \dfrac{\partial T}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ et ceci de manière exacte (différentielle) et non approchée.

II Les fonctions sinusoïdales

Ce sont, en particulier, les solutions des équations différentielles homogènes linéaires d'ordre deux avec discriminant négatif. Elles *ne* s'écrivent *pas* avec $A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ même si cela est raisonnable d'un point de vue mathématique : décomposition de la solution sur une base orthonormée (normée à l'aide d'un $\sqrt{2}$: cf. la valeur efficace).

Lorsqu'il y a ***une*** sinusoïde, les seules grandeurs importantes sont l'amplitude et la fréquence de celle-ci, on écrit donc $C\cos(\omega t+\Phi)$ qui fait clairement apparaître ces deux grandeurs. La phase, de peu d'intérêt dans ce cas, peut alors s'annuler par un choix judicieux de l'origine des temps : $C\cos(\omega t')$ avec $t' = t - \dfrac{\Phi}{\omega}$.

Lorsqu'il y a plusieurs sinusoïdes, le décalage entre celles-ci présente de l'intérêt et ce décalage est donné par la phase.

III Les complexes

On raisonnera en *amplitude* complexe soit $s(t) = C\cos(\omega t+\Phi) = \Re(\underline{S}\cdot e^{j\omega t})$ avec donc $\underline{S} = Ce^{j\Phi}$. $\underline{s}(t) = Ce^{j\omega t+\Phi}$ est le signal analytique.

Plus généralement pour s(t) T-périodique avec $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

$$s(t) = C_0 + \Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underline{C}_n e^{jn\omega_0 t}\right)\right)$$

$\underline{C}_n$ est l'amplitude complexe pour la pulsation $\omega = n\omega_0$ que l'on peut donc considérer comme $\underline{S}(\omega = n\omega_0)$. On est passé d'une représentation temporelle $s(t)$ à une représentation fréquentielle $\underline{S}(\omega)$.

IV La différentielle logarithmique

Si on a $f = \dfrac{x^a\cdot y^b}{z^c}$, alors $\dfrac{\mathrm{d}f}{f} = a\dfrac{\mathrm{d}x}{x} + b\dfrac{\mathrm{d}y}{y} - c\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$, utile aussi bien pour dériver que dans le cadre des approximations où le physicien confond allègrement différentielle et variation.

V Continuité discontinuité

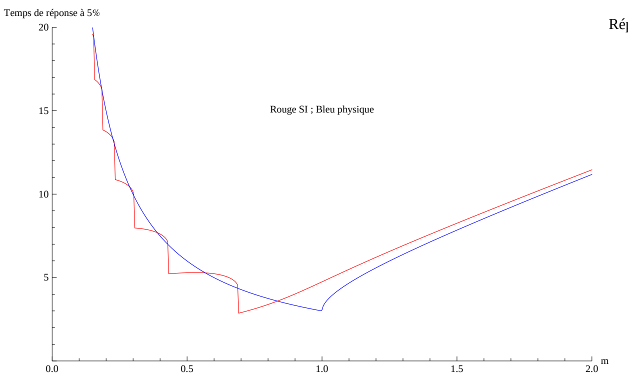
Les discontinuités sont contenues dans l'équation différentielle. Par exemple, dans le cas d'un circuit RC, on trouve la réponse aux bornes de R à un échelon en entrée par intégration entre $t=0^-$ et $t=0^+$.

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left(1+\tau\frac{\mathrm{d}v_R}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\tau\frac{\mathrm{d}v_E}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \text{ soit } \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}v_R\,\mathrm{d}t+\tau[v_R]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=\tau[v_E]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=\tau E$$

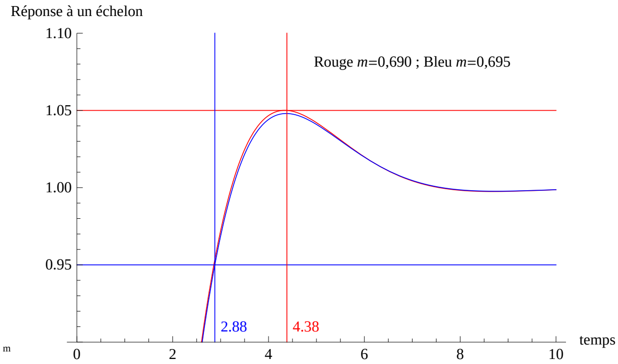
En faisant tendre ε vers zéro, le premier terme est nul (intégration de v_R borné sur un temps infiniment court) et le deuxième donne la discontinuité de v_R. En pratique, on utilisera le théorème de l'état initial, cf. VII.

VI Temps de réponse d'un filtre du second ordre

Dans le cas où le facteur d'amortissement $m<1$, on remarque que la constante de temps de l'oscillateur obéit à $m\omega_0\tau=1$, ω_0 étant la pulsation propre (c'est-à-dire non amorti) du système. En prenant en compte le facteur 3 classique, on peut donc dire que l'oscillation est amortie à 5 % près au bout de 3τ. Une autre définition de la rapidité est le temps de réponse à 5%, temps tel que la réponse à un échelon reste contenue entre 95 et 105% du régime permanent. Cette définition n'est elle-même pas très astucieuse car conduisant à des discontinuités (voir les courbes ci-dessous) mais c'est celle utilisée en SI, elle conduit à un minimum pour $m\approx 0,7$ correspondant à un dépassement maximum de 5%. La figure (a) permet la comparaison du point de vue physique et SI.



(a) Temps de réponse à 5%



(b) L'une des réponses est deux fois plus rapide

VII Laplace et dérivation

On note $\Upsilon(t)$, la fonction échelon (de Heaviside), telle que $\Upsilon(t)=0$ pour $t<0$ et $\Upsilon(t)=1$ pour $t>0$ et $\mathscr{L}$ la transformée de Laplace : $\mathscr{L}(\mathrm{f})=F(p)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ ou $F(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\Upsilon(t)f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

Avec la deuxième définition, $\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ signifie donc $\mathscr{L}\left(\Upsilon(t)\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\right)\neq\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}(\Upsilon\cdot\mathrm{f})}{\mathrm{d}t}(t)\right)$

Formule usuelle de dérivation

Au sens des fonctions : $\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t}(t)\right)=p\mathscr{L}(\Upsilon(t)\cdot\mathrm{f}(t))-\mathrm{f}(0^+)$; formule parfaitement exacte mais d'intérêt quasi nul : si f est une fonction continue, nécessaire pour effectuer une dérivation en 0 avec f = 0 pour $t<0$, cas usuel d'utilisation, on a alors $\mathrm{f}(0^+)=f(0)=0$!

Au sens des distributions $\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}(\Upsilon\cdot f)}{\mathrm{d}t}(t)\right)=p\mathscr{L}\left(\Upsilon(t)\cdot f(t)\right)$)

Exemple :

$\mathscr{L}(\sin\omega t)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$; $\mathscr{L}(\cos\omega t)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$;

$$\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}(\cos\omega t)}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{p^2}{p^2+\omega^2}-1=\frac{p^2-p^2-\omega^2}{p^2+\omega^2}=-\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2}=\mathscr{L}\left(-\omega\sin\omega t\right)$$

Ceci est parfaitement exact, *mais* ce n'est pas ce qui nous intéresse : quand l'entrée d'un circuit est $\cos(\omega t)$, avec le circuit au repos pour $t<0$, le circuit voit une discontinuité en 0. Si c'est l'entrée d'un circuit dérivateur, la sortie est donc $\dfrac{\mathrm{d}(\Upsilon(t)\cdot\cos(\omega t))}{\mathrm{d}t}$ dont la transformée de Laplace est $p\mathscr{L}\left(\cos\omega t\right)=\dfrac{p^2}{p^2+\omega^2}=1-\dfrac{\omega^2}{p^2+\omega^2}$ qui donne bien une impulsion (1 est la transformée de Laplace d'un Dirac) et la dérivée du cosinus. Avec la formule usuelle, on n'a que la dérivée du cosinus.

Transformée de Laplace de la dérivée d'un échelon

Pour une fonction échelon

$$\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}\Upsilon}{\mathrm{d}t}(t)\right)=p\mathscr{L}\left(\Upsilon(t)\right)=p\frac{1}{p}=1=L\delta(t)$$

et non $\mathscr{L}\left(\dfrac{\mathrm{d}\Upsilon}{\mathrm{d}t}(t)\right)=p\mathscr{L}\left(\Upsilon(t)\right)-\Upsilon(0^+)=p\dfrac{1}{p}-1=0$, qui ne marche pas car la dérivée de $\Upsilon(t)$ n'est pas une fonction!

Transformée de Laplace avec valeur non nulle pour $t<0$

Au sens des distributions, on a $\mathscr{L}\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)=p\mathscr{L}\left(f(t)\right)-f(0^-)$

Vérification : un échelon allant de -1 à +2 traduit par une rampe passant en 0 à $t=0$, avec la pente de la rampe tendant vers l'infini.

« Démonstration » : en notant entre crochet la distribution associée à la fonction $f(t)$ discontinue en $t=0$: $\left[f(t)\right]'=\left[f'(t)\right]+\delta(t)\left(f(0^+)-f(0^-)\right)$ et donc

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}\left[f\right]}{\mathrm{d}t}(t)\right)&=\mathscr{L}\left(\left[f'(t)\right]\right)+\mathscr{L}\left(\left(f(0^+)-f(0^-)\right)\cdot\delta(t)\right)\\&=p\mathscr{L}\left(f(t)\right)-f(0^+)+\left(f(0^+)-f(0^-)\right)\cdot 1=p\mathscr{L}\left(f(t)\right)-f(0^-)\end{aligned}$$

D'après Mathematica : « The lower limit of the integral is effectively taken to be 0^-, so that the Laplace transform of the Dirac delta function δ is equal to 1. »

VIII Dérivation vectorielle

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur $\vec{U}(t)$ dans un référentiel $\mathscr{R}$ se calcule à partir de sa dérivée dans un référentiel $\mathscr{R}'$ et du vecteur rotation du mouvement $\mathscr{R}'/\mathscr{R}$.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}=\left(\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}'}+\vec{\Omega}(\mathscr{R}'/\mathscr{R})\wedge\vec{U}$$

VIII.1 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique

Appliquons cette relation à la vitesse d'une particule chargée placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire dans un référentiel $\mathscr{R}$, on note $\vec{v}$ la vitesse dans ce référentiel $\vec{v}=\vec{v}_{\mathscr{R}}$.

Le principe fondamental de la dynamique dans $\mathscr{R}$ donne : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$.

On cherche un référentiel $\mathscr{R}'$ dans lequel cette vitesse (vitesse dans $\mathscr{R}$!) serait constante.

$\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}=\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}'}+\vec{\Omega}(\mathscr{R}'/\mathscr{R})\wedge\vec{v}$ avec $\vec{v}=\vec{v}_{\mathscr{R}}$! On remarque alors que si $\vec{\Omega}(\mathscr{R}'/\mathscr{R})=-\dfrac{q}{m}\vec{B}$, on a $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}'}=0$. Dans le référentiel $\mathscr{R}'$ qui tourne à la vitesse $-\dfrac{q}{m}\vec{B}$ par rapport à $\mathscr{R}$, le vecteur $\vec{v}$ est constant. Donc dans $\mathscr{R}$, la vitesse est un vecteur de norme constante tournant à la vitesse angulaire $-\dfrac{q}{m}\vec{B}$.

Si on ajoute une force de type frottement fluide $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -k\vec{v} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$, on peut identifier $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}'} = -\frac{k}{m}\vec{v}$ et $\vec{\Omega}(\mathscr{R}'/\mathscr{R}) \wedge \vec{v} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$. On a alors, dans $\mathscr{R}'$, $\vec{v} = \vec{v}_{t=0}\exp(-kt)$ et le retour dans $\mathscr{R}$ donne un vecteur de norme diminuant exponentiellement et tournant à la vitesse angulaire $-\frac{q}{m}\vec{B}$.

VIII.2 Théorème de Larmor

Soit une particule chargée placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire et dans un champ newtonien dans un référentiel $\mathscr{R}$, on note $\vec{v}$ la vitesse dans ce référentiel $\vec{v} = \vec{v}_{\mathscr{R}}$. On connait le résultat en l'absence de champ magnétique $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r}$: trajectoire newtonienne plane.

Le principe fondamental de la dynamique dans $\mathscr{R}$ donne : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

En définissant $\mathscr{R}'$ comme un référentiel tournant à la vitesse $\vec{\Omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} = \vec{\Omega} = -\frac{q}{2m}\vec{B}$ par rapport à $\mathscr{R}$, on peut réécrire l'équation sous la forme : $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{mr^2}\vec{u_r} + 2\Omega \wedge \vec{v}$.

Changement de référentiel : $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$ et $\vec{v} = \vec{v'} + \Omega \wedge \vec{r}$

Soit $\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = -\frac{k}{mr^2}\vec{u_r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}' + 2\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$.

Soit $\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{mr^2}\vec{u_r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$. Pour un champ raisonnable [2], ce dernier terme est négligeable et donc, dans le référentiel tournant, la trajectoire est une trajectoire newtonienne.

2. pour avoir le dernier terme du même ordre que le premier, avec deux charges élémentaires distantes de 10^{-10} m, $B = 2 \cdot 10^5$ T

Table des matières